PITAGORAS ACADEMIA

TRIGONOMETRÍA

Profesora
Rosa Flores

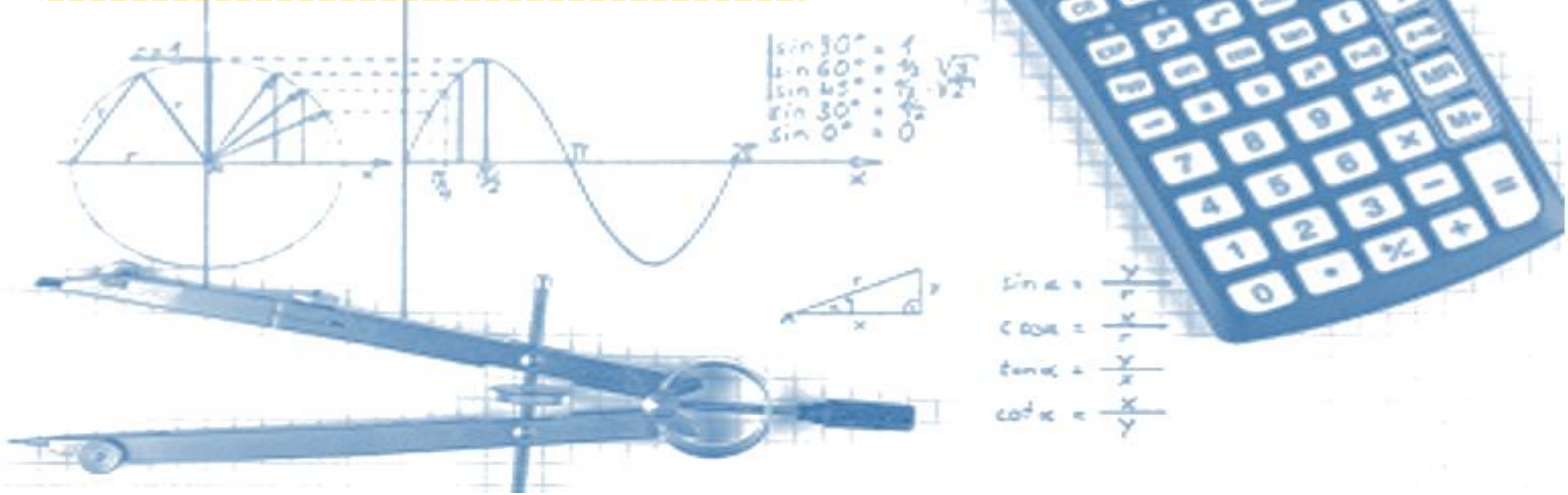
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidades fundamentales – Identidades auxiliares – Propiedad

OBJETIVOS

Reconocer las identidades fundamentales; su forma despejada y su aplicación en los diversos ejercicios a realizar.

Identificar las identidades auxiliares; su forma comprobada y su aplicación en los diversos ejercicios a realizar.



IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boxed{Sen2x = 2SenxCosx}$$

Demostración:

$$Sen(x+x) = Senx.Cosx + Senx.Cosx$$

$$Sen(2x) = 2Senx.Cosx$$

EJEMPLO: *Simplificar.*

$$E = \frac{Sen2x + 2Senx}{Cosx + 1}$$

Resolución:

Veamos:

$$E = \frac{2Senx.Cosx + 2Senx}{Cosx + 1}$$

$$E = \frac{2Senx(\cancel{Cosx + 1})}{\cancel{Cosx + 1}}$$

$$E = 2Senx$$

EJEMPLO: *Simplificar.*

$$E = 8Senx.Cosx.Cos2x.Cos4x$$

Resolución:

Veamos:

$$E = 4(2)\underbrace{Senx.Cosx}.Cos2x.Cos4x$$

$$E = 2\underbrace{(2)Sen2x\ .Cos2x}.Cos4x$$

$$E = \underbrace{2.Sen4x.Cos4x}$$

$$E = Sen8x$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boldsymbol{Cos2x = Cos^2x - Sen^2x}$$

Demostración:

$$Cos(x+x) = Cosx.Cosx - Senx.Senx$$
$$Cos(2x) = Cos^2x - Sen^2x$$

$$\boldsymbol{Cos2x = 1 - 2Sen^2x}$$

Demostración:

$$Cos(2x) = Cos^2x - Sen^2x$$
$$Cos(2x) = (1 - Sen^2x) - Sen^2x$$
$$Cos(2x) = 1 - 2Sen^2x$$

$$\boldsymbol{Cos2x = 2Cos^2x - 1}$$

Demostración:

$$Cos(2x) = Cos^2x - Sen^2x$$
$$Cos(2x) = Cos^2x - (1 - Cos^2x)$$
$$Cos(2x) = 2Cos^2x - 1$$

EJEMPLO: $Simplificar.$

$$E = Cos^4x - Sen^4x$$

Resolución:

Veamos:

$$E = (Cos^2x - Sen^2x)(Cos^2x + Sen^2x)$$
$$E = (Cos2x)(1)$$
$$E = Cos2x$$

EJEMPLO: $Si: Cosx = -\frac{1}{3}; x \in IIIC$

$Calcular: Cos2x$

Resolución:

Veamos:

$$Cos2x = 2Cos^2x - 1$$
$$= 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{2}{9} - 1$$
$$= -\frac{7}{9}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boldsymbol{Tan2x = \frac{2Tanx}{1 - Tan^2x}}$$

Demostración:

Veamos:

$$Tan(x + x) = \frac{Tanx + Tanx}{1 - Tanx.Tanx}$$

$$Tan(2x) = \frac{2Tanx}{1 - Tan^2x}$$

EJEMPLO: $Si: Tanx = -2; x \in IVC$

$Calcular: Tan2x$

Resolución:

Veamos:

$$Tan2x = \frac{2Tanx}{1 - Tan^2x}$$

$$= \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2}$$

$$= \frac{4}{3}$$

EJEMPLO: $Si: 3Tan^2x + 4Tanx - 3 = 0$

$Calcular: Tan2x$

Resolución:

Dato:

$$3Tan^2x + 4Tanx - 3 = 0$$

$$4Tanx = 3 - 3Tan^2x$$

$$2(2Tanx) = 3(1 - Tan^2x)$$

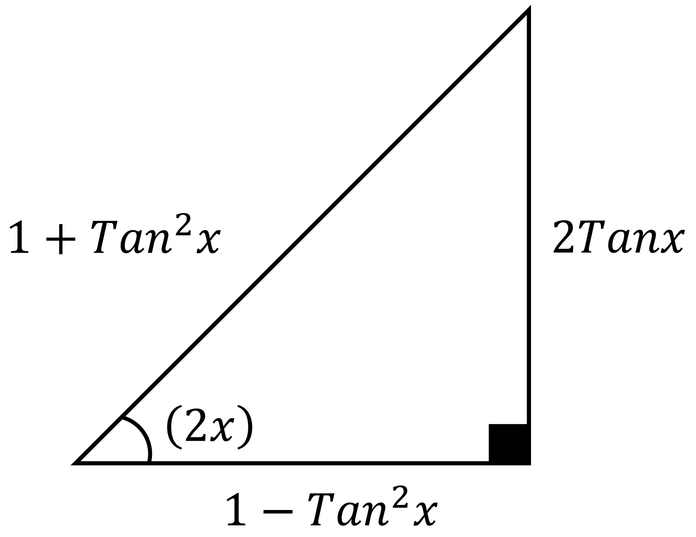
$$\frac{2Tanx}{1 - Tan^2x} = \frac{3}{2}$$

$$Tan2x = \frac{3}{2}$$

IDENTIDADES EN RELACIÓN A LA TANGENTE

Recuerda:

$$Tan\,(2x) = \frac{2Tanx}{1 - Tan^2x}$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$(H)^2 = (2Tanx)^2 + (1 - Tan^2x)^2$$
$$(H)^2 = 4Tan^2x + 1 - 2Tan^2x + Tan^4x$$
$$(H)^2 = 1 + 2Tan^2x + Tan^4x$$
$$(H)^2 = (1 + Tan^2x)^2$$
$$H = 1 + Tan^2x$$

Tenemos:

$$Sen(2x) = \frac{2Tanx}{1 + Tan^2x}$$

$$Cos(2x) = \frac{1 - Tan^2x}{1 + Tan^2x}$$

EJEMPLO: *Simplificar*:

$$E = \frac{2Tan(45^o - x)}{1 + Tan^2(45^o - x)}$$

Resolución:

Veamos:

$$E = \frac{2Tan(45^o - x)}{1 + Tan^2(45^o - x)}$$
$$E = Sen2(45^o - x)$$
$$E = Sen(90^o - 2x)$$
$$E = Cos(2x)$$

EJEMPLO: *Si*:

$$3Tan^2x - 8Tanx + 3 = 0$$

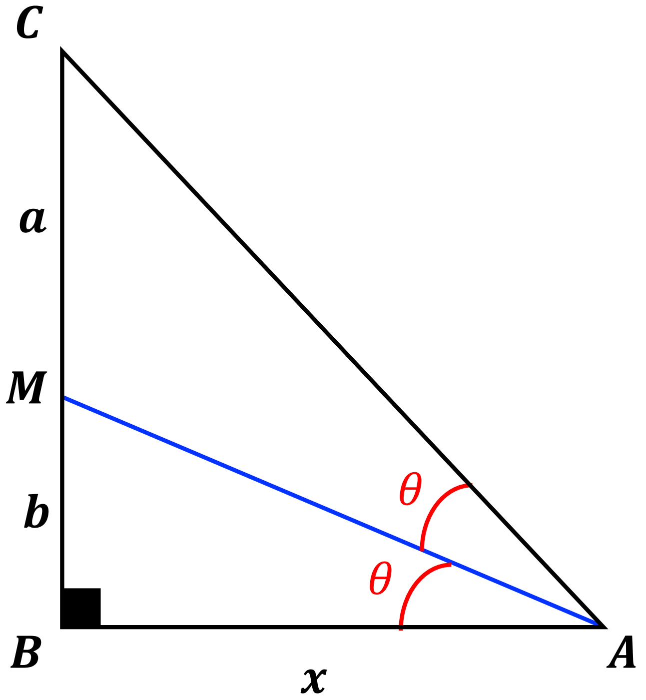
Calcular: $Csc2x$

Resolución:

Dato:

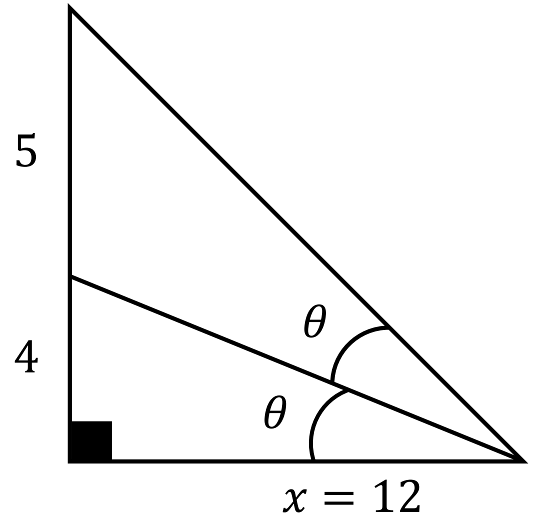
$$3Tan^2x - 8Tanx + 3 = 0$$
$$3 + 3Tan^2x = 8Tanx$$
$$3(1 + Tan^2x) = 4(2Tanx)$$
$$\frac{1 + Tan^2x}{2Tanx} = \frac{4}{3}$$
$$Csc2x = \frac{4}{3}$$

PROPIEDAD



$$x = b.\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

EJEMPLO: *Calcule*: $Tan\theta$



Resolución:

Aplicando la propiedad:

$$x = 4.\sqrt{\frac{5+4}{5-4}}$$

$$x = 4.\sqrt{9}$$

$$x = 12$$

Nos piden:

$$Tan\theta = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\boldsymbol{Cotx + Tanx = 2Csc2x}$$

Demostración:

Veamos: $Cotx + Tanx = \dfrac{Cosx}{Senx} + \dfrac{Senx}{Cosx}$

$= \dfrac{2}{2}\dfrac{(Cos^2x + Sen^2x)}{Senx.Cosx}$

$= 2.\dfrac{1}{Sen2x}$

$= 2Csc2x$

$$\boldsymbol{Cotx - Tanx = 2Cot2x}$$

Demostración:

Veamos: $Cotx - Tanx = \dfrac{Cosx}{Senx} - \dfrac{Senx}{Cosx}$

$= \dfrac{2}{2}\dfrac{(Cos^2x - Sen^2x)}{Senx.Cosx}$

$= 2.\dfrac{Cos2x}{Sen2x}$

$= 2Cot2x$

EJEMPLO: $Si: Tanx + Cotx = 3$

$Calcular: Cos4x$

Resolución:

Dato: $Tanx + Cotx = 3$

$2Csc2x = 3$

$Csc2x = \dfrac{3}{2}$

$Sen2x = \dfrac{2}{3}$

Nos piden:

$Cos4x = 1 - 2Sen^2 2x$

$= 1 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$= 1 - \dfrac{8}{9}$

$= \dfrac{1}{9}$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\boldsymbol{Csc2x + Cot2x = Cotx}$$

Demostración:

Veamos: $Csc2x + Cot2x = \dfrac{Cotx + Tanx}{2} + \dfrac{Cotx - Tanx}{2}$

$= \dfrac{2Cotx}{2}$

$= Cotx$

$$\boldsymbol{Csc2x - Cot2x = Tanx}$$

Demostración:

Veamos: $Csc2x - Cot2x = \dfrac{Cotx + Tanx}{2} - \left(\dfrac{Cotx - Tanx}{2}\right)$

$= \dfrac{Cotx + Tanx - Cotx + Tanx}{2}$

$= \dfrac{2Tanx}{2}$

$= Tanx$

EJEMPLO: *Simplificar*:

$E = Cscx + Csc2x + Csc4x + Cot4x$

Resolución:

Veamos:

$E = Cscx + Csc2x + \underbrace{Csc4x + Cot4x}$

$E = Cscx + \underbrace{Csc2x + Cot2x}$

$E = \underbrace{Cscx + Cotx}$

$E = Cot\left(\dfrac{x}{2}\right)$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$(\boldsymbol{Senx + Cosx})^2 = \mathbf{1} + \boldsymbol{Sen2x}$$

Demostración:

Veamos:

$$\begin{aligned}(Senx + Cosx)^2 &= 1 + 2Senx.Cosx\\ &= 1 + Sen2x\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{Senx - Cosx})^2 = \mathbf{1} - \boldsymbol{Sen2x}$$

Demostración:

Veamos:

$$\begin{aligned}(Senx - Cosx)^2 &= 1 - 2Senx.Cosx\\ &= 1 - Sen2x\end{aligned}$$

EJEMPLO: $Si:\ Senx + Cosx = \frac{1}{3}$

$Calcular: Cos4x$

Resolución:

Dato:

$$Senx + Cosx = \frac{1}{3}$$

$$(Senx + Cosx)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$1 + Sen2x = \frac{1}{9}$$

$$Sen2x = -\frac{8}{9}$$

Nos piden:

$$\begin{aligned}Cos4x &= 1 - 2Sen^2 2x\\ &= 1 - 2\left(-\frac{8}{9}\right)^2\\ &= 1 - \frac{128}{81}\\ &= -\frac{47}{81}\end{aligned}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\boldsymbol{Sec2x + 1 = Tan2x.Cotx}$$

Demostración:

Veamos:

$$\begin{aligned} Sec2x + 1 &= \frac{1}{Cos2x} + 1 \\ &= \frac{1 + Cos2x}{Cos2x} \\ &= \frac{2Cosx.Cosx}{Cos2x} \times \frac{Senx}{Senx} \\ &= \frac{Sen2x}{Cos2x} \cdot \frac{Cosx}{Senx} \\ &= Tan2x.Cotx \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Sec2x - 1 = Tan2x.Tanx}$$

Demostración:

Veamos:

$$\begin{aligned} Sec2x + 1 &= \frac{1}{Cos2x} - 1 \\ &= \frac{1 - Cos2x}{Cos2x} \\ &= \frac{2Senx.Senx}{Cos2x} \times \frac{Cosx}{Cosx} \\ &= \frac{Sen2x}{Cos2x} \cdot \frac{Senx}{Cosx} \\ &= Tan2x.Tanx \end{aligned}$$

IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN

$$2Sen^2x = 1 - Cos2x$$

Demostración:

Veamos:

$$Cos2x = 1 - 2Sen^2x$$
$$2Sen^2x = 1 - Cos2x$$

$$2Cos^2x = 1 + Cos2x$$

Demostración:

Veamos:

$$Cos2x = 2Cos^2x - 1$$
$$1 + Cos2x = 2Cos^2x$$

EJEMPLO: $Simplificar$:

$$E = \frac{1 + Sen2x + Cos2x}{1 + Sen2x - Cos2x}$$

Resolución:

Ordenando:

$$E = \frac{1 + Cos2x + Sen2x}{1 - Cos2x + Sen2x}$$

$$E = \frac{2Cos^2x + 2Senx.Cosx}{2Sen^2x + 2Senx.Cosx}$$

$$E = \frac{\cancel{2}Cosx(\cancel{Cosx + Senx})}{\cancel{2}Senx(\cancel{Senx + Cosx})}$$

$$E = Cotx$$

IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN

$$8Sen^4x = 3 - 4Cos2x + Cos4x$$

Demostración:

Veamos: $(2Sen^2x)^2 = (1 - Cos2x)^2$

$$2(4Sen^4x) = (1 - 2Cos2x + Cos^22x)2$$
$$8Sen^4x = 2 - 4Cos2x + 2Cos^22x$$
$$8Sen^4x = 2 - 4Cos2x + 1 + Cos4x$$
$$8Sen^4x = 3 - 4Cos2x + Cos4x$$

$$8Cos^4x = 3 + 4Cos2x + Cos4x$$

Demostración:

Veamos: $(2Cos^2x)^2 = (1 + Cos2x)^2$

$$2(4Cos^4x) = (1 + 2Cos2x + Cos^22x)2$$
$$8Cos^4x = 2 + 4Cos2x + 2Cos^22x$$
$$8Cos^4x = 2 + 4Cos2x + 1 + Cos4x$$
$$8Cos^4x = 3 + 4Cos2x + Cos4x$$

IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN

$$Sen^4x + Cos^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}Cos4x$$

Demostración:

Veamos: $2(Sen^4x + Cos^4x) = (1 - 2Sen^2x.Cos^2x)2$

$$2(Sen^4x + Cos^4x) = 2 - 4Sen^2x.Cos^2x$$

$$2(Sen^4x + Cos^4x) = 2 - (2Senx.Cosx)^2$$

$$2 \times 2(Sen^4x + Cos^4x) = (2 - Sen^2 2x)2$$

$$4(Sen^4x + Cos^4x) = 4 - 2Sen^2 2x$$

$$4(Sen^4x + Cos^4x) = 4 - (1 - Cos4x)$$

$$Sen^4x + Cos^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}Cos4x$$

$$Sen^6x + Cos^6x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}Cos4x$$

Demostración:

Veamos: $4(Sen^4x + Cos^4x) = (1 - 3Sen^2x.Cos^2x)4$

$$4(Sen^4x + Cos^4x) = 4 - 3.4Sen^2x.Cos^2x$$

$$4(Sen^4x + Cos^4x) = 4 - 3(2Senx.Cosx)^2$$

$$2 \times 4(Sen^4x + Cos^4x) = (4 - 3Sen^2 2x)2$$

$$8(Sen^4x + Cos^4x) = 8 - 3.2Sen^2 2x$$

$$8(Sen^4x + Cos^4x) = 8 - 3(1 - Cos4x)$$

$$Sen^4x + Cos^4x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}Cos4x$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boldsymbol{Sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}}$$

Demostración:

$$2Sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - Cosx$$

$$Sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-Cosx}{2}$$

$$Sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}$$

Recuerda:

El signo $(+)$ o $(-)$ dependerá del cuadrante del arco $\left(\frac{x}{2}\right)$

EJEMPLO: Si: $Cosx = \frac{1}{3}; x \in \langle 270^o; 360^o \rangle$

$Calcular$: $Sen\left(\frac{x}{2}\right)$

Resolución:

Dato 1:

$$Cosx = \frac{1}{3}$$

Dato 2:

$$x \in \langle 270^o; 360^o \rangle \rightarrow \frac{x}{2} \in \langle 135^o; 180^o \rangle$$

$$\rightarrow \frac{x}{2} \in IIC$$

Nos piden:

$$\underbrace{Sen\left(\frac{x}{2}\right)}_{IIC} = +\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$Sen\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boldsymbol{Cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}}$$

Demostración:

$$2Cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + Cosx$$

$$Cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+Cosx}{2}$$

$$Cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}$$

Recuerda:

El signo $(+)$ o $(-)$ dependerá del cuadrante del arco $\left(\frac{x}{2}\right)$

EJEMPLO: *Si*: $Senx = -\frac{\sqrt{13}}{7}; x \in \langle 180^o; 270^o\rangle$

Calcular: $Cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Resolución:

Dato 1: $x \in IIIC \rightarrow (-;-)$

$$Senx = \frac{-\sqrt{13}}{7} = \frac{Y}{R} \qquad -6 = X$$

$$\Rightarrow \quad Cosx = \frac{-6}{7}$$

Dato 2:

$$x \in \langle 180^o; 270^o\rangle \rightarrow \frac{x}{2} \in \langle 90^o; 135^o\rangle$$

$$\rightarrow \frac{x}{2} \in IIC$$

Nos piden:

$$\underbrace{Cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{IIC} = -\sqrt{\frac{1+\frac{-6}{7}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{1}}} = -\sqrt{\frac{1}{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}\left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{14}}{14}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boldsymbol{Tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - Cosx}{1 + Cosx}}}$$

Demostración:

$$Tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{Sen\left(\frac{x}{2}\right)}{Cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1 - Cosx}{2}}{\frac{1 + Cosx}{2}}}$$

$$Tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - Cosx}{1 + Cosx}}$$

Recuerda:

El signo $(+)$ o $(-)$ dependerá del cuadrante del arco $\left(\frac{x}{2}\right)$

EJEMPLO: *Reducir*:

$$E = \sqrt{\frac{1 - Cos37^o}{1 + Cos37^o}} + \sqrt{\frac{1 - Cos53^o}{1 + Cos53^o}}$$

Resolución:

Veamos:

$$E = \underbrace{\sqrt{\frac{1 - Cos37^o}{1 + Cos37^o}}} + \underbrace{\sqrt{\frac{1 - Cos53^o}{1 + Cos53^o}}}$$

$$E = Tan\left(\frac{37^o}{2}\right) + Tan\left(\frac{53^o}{2}\right)$$

$$E = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$E = \frac{5}{6}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\boldsymbol{Tan\frac{x}{2} = Cscx - Cotx}$$

$$\boldsymbol{Cot\frac{x}{2} = Cscx + Cotx}$$

$\underline{\boldsymbol{EJEMPLO}}$: $Si: Tanx = 3; x\ es\ agudo$

$Calcular:$ $Cot\left(45^o - \frac{x}{2}\right)$

$\underline{Resolución:}$

Dato:

$$Tanx = \frac{3}{1} = \frac{C.O.}{C.A.}$$
$$\sqrt{10} = H$$

Nos piden:

$$Cot\left(45^o - \frac{x}{2}\right) = Csc(90^o - x) + Cot(90^o - x)$$
$$= Secx + Tanx$$
$$= \sqrt{10} + 3$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\boldsymbol{Cot\frac{x}{2}+Tan\frac{x}{2}=2Cscx}$$

$$\boldsymbol{Cot\frac{x}{2}-Tan\frac{x}{2}=2Cotx}$$

EJEMPLO: *Reducir*:

$$M=\frac{2Cscx-Tan\left(\frac{x}{2}\right)}{2Cotx+Tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Resolución:

Veamos:

$$M=\frac{2Cscx-Tan\left(\frac{x}{2}\right)}{2Cotx+Tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$M=\frac{Cot\left(\frac{x}{2}\right)+\cancel{Tan\left(\frac{x}{2}\right)}-\cancel{Tan\left(\frac{x}{2}\right)}}{Cot\left(\frac{x}{2}\right)-\cancel{Tan\left(\frac{x}{2}\right)}+\cancel{Tan\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$M=\frac{Cot\left(\frac{x}{2}\right)}{Cot\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$M=1$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boldsymbol{Sen3x = 3Senx - 4Sen^3x}$$

Demostración:

$$Sen(2x + x) = Sen2x.Cosx + Senx.Cos2x$$
$$Sen(3x) = (2Senx.Cosx)Cosx + Senx(1 - 2Sen^2x)$$
$$Sen(3x) = 2Senx.Cos^2x + Senx - 2Sen^3x$$
$$Sen(3x) = 2Senx(1 - Sen^2x) + Senx - 2Sen^3x$$
$$Sen(3x) = 3Senx - 4Sen^3x$$

$$\boldsymbol{Sen3x = Senx(2Cos2x + 1)}$$

Demostración:

$$Sen(3x) = 3Senx - 4Sen^3x$$
$$Sen(3x) = Senx(3 - 2(2)Sen^2x)$$
$$Sen(3x) = Senx\big(3 - 2(1 - Cos2x)\big)$$
$$Sen(3x) = Senx(1 + 2Cos2x)$$

EJEMPLO: $Si: Tanx = \frac{3}{4}; x\ es\ agudo$

Calcular: $Sen3x$

Resolución:

Dato:

$$Tanx = \frac{3}{4} = \frac{C.O.}{C.A.}$$
$$5 = H$$

Nos piden:

$$Sen3x = 3Senx - 4Sen^3x$$
$$= 3\left(\frac{3}{5}\right) - 4\left(\frac{3}{5}\right)^3$$
$$= \frac{9}{5} - 4\left(\frac{27}{125}\right)$$
$$= \frac{9}{5} - \frac{108}{125}$$
$$= \frac{117}{125}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boldsymbol{Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx}$$

Demostración:

$$Cos(2x + x) = Cos2x.Cosx - Senx.Sen2x$$
$$Cos(3x) = (2Cos^2x - 1)Cosx - Senx(2Senx.Cosx)$$
$$Cos(3x) = 2Cos^3x - Cosx - 2Sen^2x.Cosx$$
$$Cos(3x) = 2Cos^3x - Cosx - 2Cosx(1 - Cos^2x)$$
$$Cos(3x) = 4Cos^3x - 3Cosx$$

$$\boldsymbol{Cos3x = Cosx(2Cos2x - 1)}$$

Demostración:

$$Cos(3x) = 4Cos^3x - 3Cosx$$
$$Cos(3x) = Cosx(2(2)Cos^2x - 3)$$
$$Cos(3x) = Cosx(2(1 + Cos2x) - 3)$$
$$Cos(3x) = Cosx(2Cos2x - 1)$$

EJEMPLO: $Si: Tanx = \frac{12}{5}; x\ es\ agudo$

$Calcular: Cos3x$

Resolución:

Dato:

$$Tanx = \frac{12}{5} = \frac{C.O.}{C.A.}$$
$$13 = H$$

Nos piden:

$$Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx$$
$$= 4\left(\frac{5}{13}\right)^3 - 3\left(\frac{5}{13}\right)$$
$$= 4\left(\frac{125}{2197}\right) - \frac{15}{13}$$
$$= \frac{500}{2197} - \frac{15}{13}$$
$$= -\frac{2035}{2197}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\boldsymbol{Tan3x = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1 - 3Tan^2x}}$$

Demostración:

$$Tan(2x + x) = \frac{Tan2x + Tanx}{1 - Tan2x.Tanx}$$

$$Tan(3x) = \frac{\frac{2Tanx}{1 - Tan^2x} + Tanx}{1 - \left(\frac{2Tanx}{1 - Tan^2x}\right)Tanx}$$

$$Tan(3x) = \frac{\frac{2Tanx + Tanx - Tan^3x}{\cancel{1 - Tan^2x}}}{\frac{1 - Tan^2x - 2Tan^2x}{\cancel{1 - Tan^2x}}}$$

$$Tan(3x) = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1 - 3Tan^2x}$$

$$\boldsymbol{\frac{Tan3x}{Tanx} = \frac{2Cos2x + 1}{2Cos2x - 1}}$$

Demostración:

$$Tan3x = \frac{Sen3x}{Cos3x}$$

$$Tan3x = \frac{Senx(2Cos2x + 1)}{Cosx(2Cos2x - 1)}$$

$$Tan3x = Tanx\frac{(2Cos2x + 1)}{(2Cos2x - 1)}$$

$$\frac{Tan3x}{Tanx} = \frac{(2Cos2x + 1)}{(2Cos2x - 1)}$$

IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN

Despejando:

$$\mathbf{4Sen^3x = 3Senx - Sen3x}$$

$$\mathbf{4Cos^3x = 3Cosx + Cos3x}$$

***EJEMPLO**: Reducir:*

$$E = \frac{4Sen^3 10^o + 4Cos^3 20^o}{Sen10^o + Cos20^o}$$

Resolución:

Veamos:

$$E = \frac{4Sen^3 10^o + 4Cos^3 20^o}{Sen10^o + Cos20^o}$$

$$E = \frac{3Sen10^o - Sen30^o + 3Cos20^o + Cos60^o}{Sen10^o + Cos20^o}$$

$$E = \frac{3Sen10^o - \cancel{\frac{1}{2}} + 3Cos20^o + \cancel{\frac{1}{2}}}{Sen10^o + Cos20^o}$$

$$E = \frac{3(\cancel{Sen10^o + Cos20^o})}{\cancel{Sen10^o + Cos20^o}}$$

$$E = 3$$

PROPIEDADES

$$4Sen(60^o - x).Senx.Sen(60^o + x) = Sen3x$$

$$4Cos(60^o - x).Cosx.Cos(60^o + x) = Cos3x$$

$$Tanx.Tan(60^o - x).Tan(60^o + x) = Tan3x$$

EJEMPLO: *Reducir*:

$$E = 4Sen20^o.Sen40^o.Sen80^o$$

Resolución:

Veamos:

$$E = 4Sen20^o.Sen40^o.Sen80^o$$

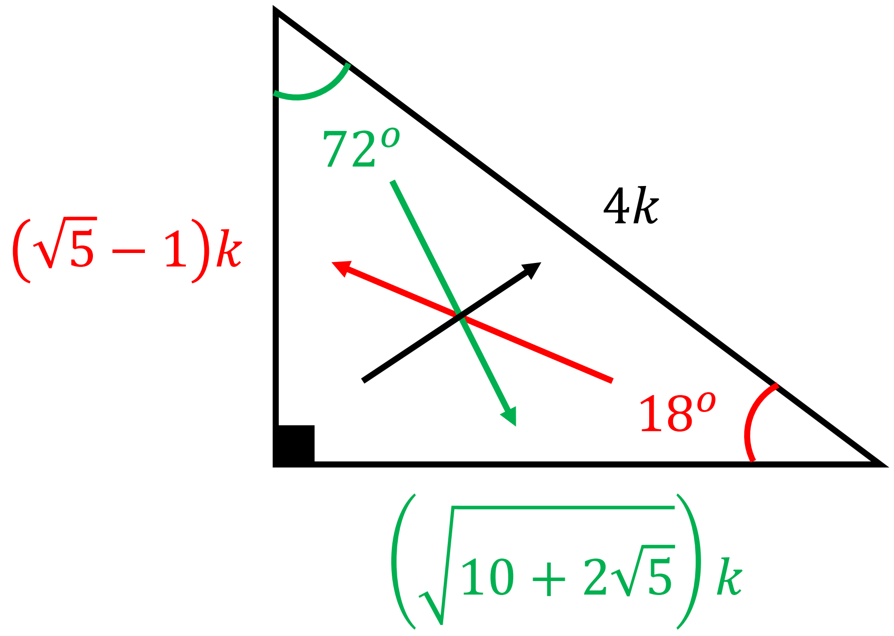
$$E = 4Sen20^o.Sen(60^o - 20^o).Sen(60^o - 20^o)$$

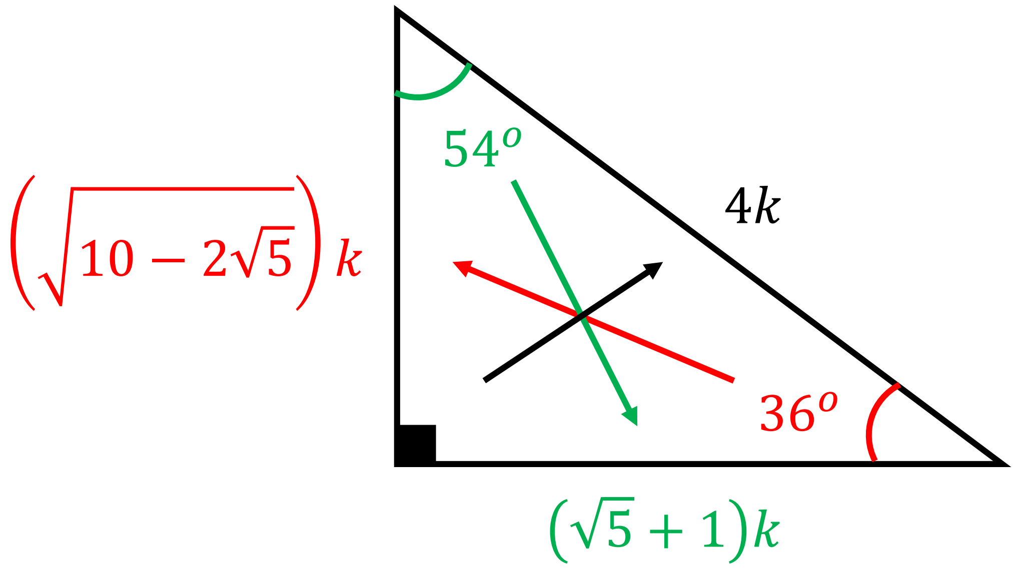
$$E = Sen3(20^o)$$

$$E = Sen60^o$$

$$E = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

TRIÁNGULOS NOTABLES

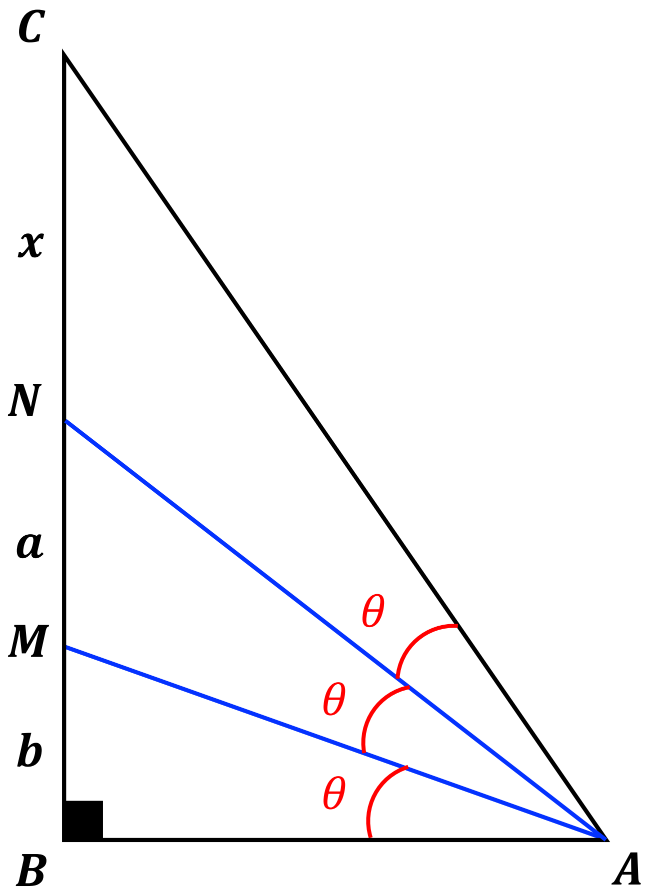




$$\boldsymbol{Sen18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

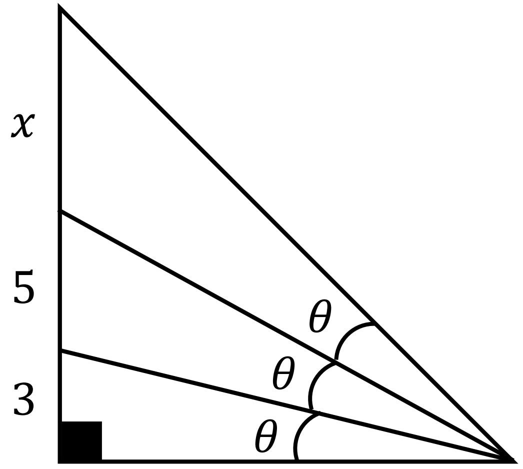
$$\boldsymbol{Cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

PROPIEDADES



$$x = \frac{a^2}{2b - a}$$

EJEMPLO: *Calcule*: "*x*"



Resolución:

Aplicando la propiedad:

$$x = \frac{5^2}{2(3) - 5}$$

$$x = \frac{25}{1}$$

$$x = 25$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

EJERCICIO 1

Hallar el valor de:

$$Tan2A + Tan2B - Tan\frac{5\pi}{4}$$

Sabiendo que:

$$TanA - TanB = 1$$
$$Sen2A = -2 + 4Sen^2A$$

A) -2	B) -1	C) 0
D) 1	E) 2	

Resolución:

Dato: $$Sen2A = -2(1 - 2Sen^2A)$$
$$Sen2A = -2(Cos2A)$$
$$Tan2A = -2$$

Luego: $$\frac{2TanA}{1 - Tan^2A} = -2$$
$$2TanA = -2 + 2Tan^2A$$

Reemplazando: $TanA = 1 + TanB$

Tenemos:

$$2(1 + TanB) = -2 + 2(1 + TanB)^2$$
$$2 + 2TanB = -2 + 2 + 4TanB + 2Tan^2B$$
$$2 - 2Tan^2B = 2TanB$$
$$2(1 - Tan^2B) = 2TanB$$
$$2 = \frac{2TanB}{1 - Tan^2B}$$
$$2 = Tan2B$$

Nos piden:

$$(-2) + (2) - \left(Tan\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

EJERCICIO 2

Calcular:

$$E = Sen^4\frac{\pi}{16} + Sen^4\frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2}Cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}Cos\frac{3\pi}{8}$$

A) $\sqrt{2}/2$	B) $-\sqrt{2}/2$	C) $3/4$	D) $-1/2$	E) $3/2$

Resolución:

Multiplicando por 4:

$$4E = 4Sen^4\frac{\pi}{16} + 4Sen^4\frac{3\pi}{16} + 2Cos\frac{\pi}{8} + 2Cos\frac{3\pi}{8}$$

$$4E = \left(2Sen^2\frac{\pi}{16}\right)^2 + \left(2Sen^2\frac{3\pi}{16}\right)^2 + 2Cos\frac{\pi}{8} + 2Cos\frac{3\pi}{8}$$

$$4E = \left(1 - Cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(1 - Cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 + 2Cos\frac{\pi}{8} + 2Cos\frac{3\pi}{8}$$

$$4E = 1 - \cancel{2Cos\frac{\pi}{8}} + Cos^2\frac{\pi}{8} + 1 - \cancel{2Cos\frac{3\pi}{8}} + Cos^2\frac{3\pi}{8} + \cancel{2Cos\frac{\pi}{8}} + \cancel{2Cos\frac{3\pi}{8}}$$

$$4E = 2 + Cos^2\frac{\pi}{8} + Sen^2\frac{\pi}{8}$$

$$E = 3/4$$

EJERCICIO 3

Si "x" es un ángulo en el primer cuadrante y:

$$Tanx = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Encontrar el valor de la siguiente expresión:

$$E = \left(\frac{Sen2x}{Cscx + Senx}\right)\sqrt{1 + \frac{a}{b}}$$

A) $\frac{2a}{a+b}$	B) $\frac{b}{a+b}$	C) $\frac{2b}{a+2b}$
D) $\frac{2a}{2a+b}$	E) $\frac{ab}{a+b}$	

Resolución:

Dato:

$$Tan^2x = \frac{a}{b}$$

$$Cot^2x = \frac{b}{a}$$

Nos piden:

$$E = \left(\frac{2.Senx.Cosx}{Cscx + Senx}\right)\sqrt{1 + Tan^2x}$$

$$E = \left(\frac{2.Senx.Cosx}{Cscx + Senx}\right)\sqrt{Sec^2x}$$

$$E = \left(\frac{2.Senx}{Cscx + Senx}\right)\left(\frac{Cscx}{Cscx}\right)$$

$$E = \left(\frac{2}{Csc^2x + 1}\right)$$

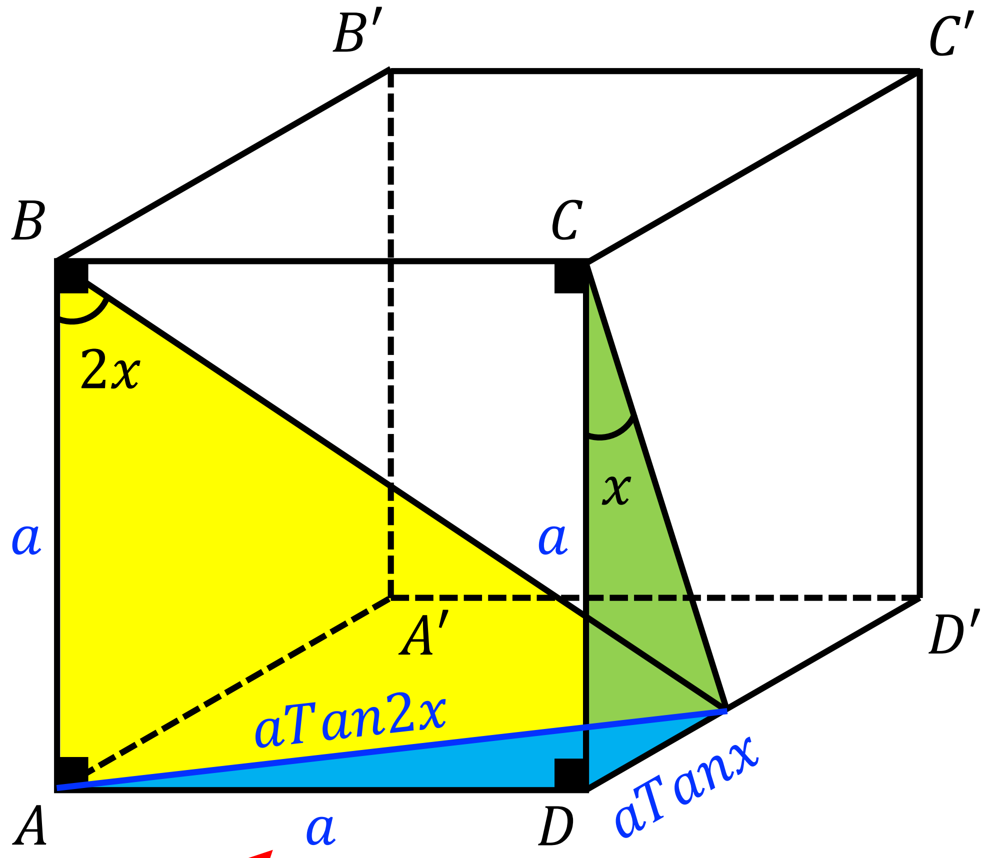
$$E = \left(\frac{2}{Cot^2x + 2}\right)$$

$$E = \left(\frac{2a}{b + 2a}\right)$$

EJERCICIO 4

En el cubo mostrado, calcular:

$$K = Sec2x - Secx.Tanx$$



A) 1	B) 2	C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$	E) 0	

Resolución:

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$1 + Tan^2x = Tan^2 2x$$
$$Sec^2x = Tan^2 2x$$
$$Secx = Tan2x$$

Nos piden:

$$K = Tan2x.Tanx + 1 - Secx.Tanx$$
$$K = \cancel{Secx.Tanx} + 1 - \cancel{Secx.Tanx}$$
$$K = 1$$

EJERCICIO 5

Si:

$$3Cscx + 2Cscy + Cscz = Cotz + 2Coty + 3Cotx$$

Calcule:

$$H = \frac{27Tan^2\frac{x}{2}}{Tan\frac{y}{2}Tan\frac{z}{2}} + \frac{8Tan^2\frac{y}{2}}{Tan\frac{x}{2}Tan\frac{z}{2}} + \frac{Tan^2\frac{z}{2}}{Tan\frac{x}{2}Tan\frac{y}{2}}$$

A) 3	B) 6	C) 12	D) 9	E) 18

Resolución:

Dato:

$$3(Cscx - Cotx) + 2(Cscy - Coty) + (Cscz - Cotz) = 0$$

$$3Tan\frac{x}{2} + 2Tan\frac{y}{2} + Tan\frac{z}{2} = 0$$

Por Identidad Condicional:

$$27Tan^3\frac{x}{2} + 8Tan^3\frac{y}{2} + Tan^3\frac{z}{2} = 3\left(Tan\frac{x}{2}.Tan\frac{y}{2}.Tan\frac{z}{2}\right)$$

$$\frac{27Tan^2\frac{x}{2}}{Tan\frac{y}{2}.Tan\frac{z}{2}} + \frac{8Tan^3\frac{y}{2}}{Tan\frac{x}{2}.Tan\frac{z}{2}} + \frac{Tan^3\frac{z}{2}}{Tan\frac{x}{2}.Tan\frac{y}{2}} = 3$$

EJERCICIO 6

Siendo:

$$\sqrt{Sen\theta + Cos\theta - \sqrt{2Sen2\theta}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Para $\theta \in \langle 0; \pi/4 \rangle$. Calcular: x/y

A) $Tan\theta$	B) $Cot\theta$	C) $Tan2\theta$
D) $Cot2\theta$	E) $Tan2\theta . Tan\theta$	

Resolución:

Dato:

$$\sqrt{Sen\theta + Cos\theta - \sqrt{2(2Sen\theta Cos\theta)}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{Sen\theta + Cos\theta - 2\sqrt{Sen\theta Cos\theta}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Como $\theta \in \langle 0; \pi/4 \rangle$, tenemos:

$$Cos\theta > Sen\theta$$

Entonces:

$$\sqrt{Cos\theta} - \sqrt{Sen\theta} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Tenemos:

$$x = Cos\theta \qquad y = Sen\theta$$

Nos piden:

$$\frac{x}{y} = \frac{Cos\theta}{Sen\theta} = Cot\theta$$

EJERCICIO 7

Hallar los valores de "R", si:

$$R = Cos2x + 2Senx$$

A) $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$	B) $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$	C) $\left[-2;\frac{3}{2}\right]$
D) $\left[-3;\frac{3}{2}\right]$	E) $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$	

Resolución:

Dato: $R = 1 - 2Sen^2x + 2Senx$

$$R = 1 - 2(Sen^2x - Senx)$$

Formando el Trinomio Cuadrado Perfecto:

$$R = 1 - 2((Senx)^2 - 2(Senx)(1/2) + (1/2)^2 - (1/2)^2)$$

$$R = 3/2 - 2(Senx - 1/2)^2$$

Por C.T.: $-1 \leq Senx \leq 1$

$-\frac{1}{2}$ $\qquad -\frac{3}{2} \leq Senx - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

$(\ \ )^2$ $\qquad 0 \leq \left(Senx - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$

$\times(-2)$ $\qquad 0 \geq -2\left(Senx - \frac{1}{2}\right)^2 \geq -\frac{9}{2}$

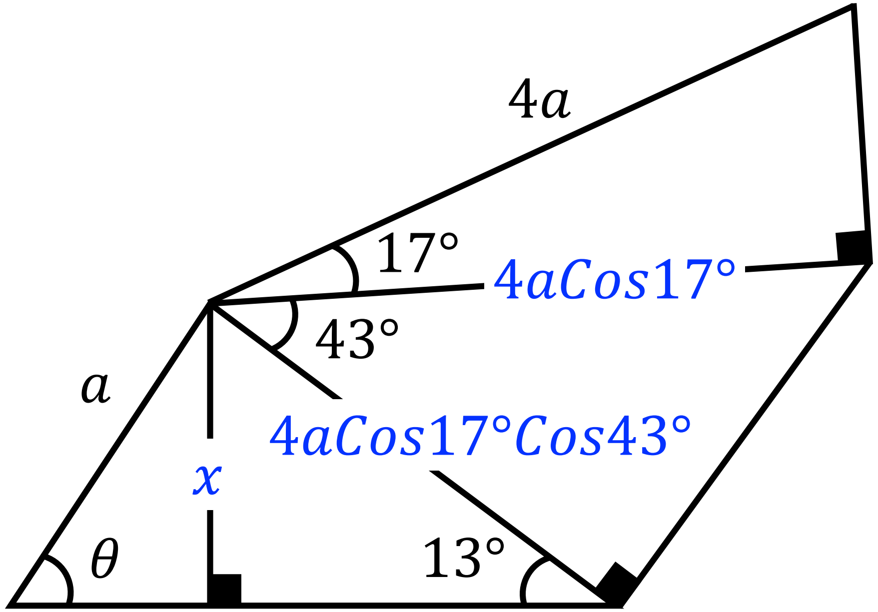
$+\frac{3}{2}$ $\qquad \frac{3}{2} \geq R \geq -3$

$$\therefore R \in \left[-3;\frac{3}{2}\right]$$

EJERCICIO 8

En el cubo mostrado, calcular:

$$K = Sec2x - Secx.Tanx$$



A) 39°	B) 17°	C) 36°
D) 51°	E) 48°	

Resolución:

Datos: $x = aSen\theta$

$$x = 4aCos17°.Cos43°.Sen13°$$

Igualando:

$$aSen\theta = 4aCos17°.Cos43°.Sen13°$$

$$Sen\theta = 4Sen73°.Sen47°.Sen13°$$

$$Sen\theta = 4Sen(60° + 13°).Sen(60° - 13°).Sen13°$$

$$Sen\theta = Sen39°$$

Entonces:

$$\theta = 39°$$

EJERCICIO 9

Hallar "x" en:

$$\left(\frac{1-Cos9\theta}{1-Cos3\theta}\right)=(x^3-3x+1)^2$$

A) $2Sen2\theta$	**B)** $1-Sen2\theta$	**C)** $2Cos2\theta$	**D)** $2Cos\theta$	**E)** $2Sen\theta$

Resolución:

Veamos:

$$\left(\frac{2Sen^2\frac{9\theta}{2}}{2Sen^2\frac{3\theta}{2}}\right)=(x^3-3x+1)^2$$

$$(2Cos3\theta+1)^2=(x^3-3x+1)^2$$

$$8Cos^3\theta-6Cos\theta+1=x^3-3x+1$$

$$(2Cos\theta)^3-3(2Cos\theta)+1=x^3-3x+1$$

Notamos:

$$x=2Cos\theta$$

EJERCICIO 10

Si el determinante de la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} Sen(60°+x) & Sen(60°-x) & Senx \\ Sen(60°-x) & Senx & Sen(60°+x) \\ Senx & Sen(60°+x) & Sen(60°-x) \end{bmatrix}$$

Es de la forma:

$$mSen\theta + nSen3\theta$$

Calcular:

$$J = m - n$$

A) 1/2	**B) 1**
C) 2	**D) 1/4**
E) 0	

Resolución:

Calculando la determinante:

$$\Delta = \frac{3}{4}Sen3x - Sen^3x - Sen^3(60°+x) - Sen^3(60°-x)$$

$$4\Delta = 3Sen3x - 4Sen^3x$$
$$-4Sen^3(60°+x) - 4Sen^3(60°-x)$$

$$4\Delta = 3Sen3x + Sen3x - 3Senx$$
$$+Sen(180°+3x) - 3Sen(60°+x)$$
$$+Sen(180°-3x) - 3Sen(60°-x)$$

$$4\Delta = 3Sen3x + Sen3x - 3Senx$$
$$-Sen3x - 3Sen(60°+x)$$
$$+Sen3x - 3Sen(60°-x)$$

$$4\Delta = 4Sen3x - 3Senx - 3(2Sen60°.Cosx)$$

$$4\Delta = 4Sen3x - 3\left(Senx + \sqrt{3}Cosx\right)$$

$$4\Delta = 4Sen3x - 2\times 3Sen(x+60°)$$

$$4\Delta = 2Sen3x + 2Senx$$

$$\Delta = \frac{1}{2}Sen3x + \frac{1}{2}Senx = mSen\theta + nSen3\theta$$

Nos piden:

$$J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ALTERNATIVAS DE LOS OTROS EJERCICIOS

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
B	*C*	*C*	*A*	*A*	*D*	*D*	*E*	*D*	*B*

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS